Synthèse -Les limites de suites n° 1 - Terminale.

1 Les limites de suites usuelles

EXERCICE 1 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2n^3 - 4n^2 + 5n - 4\right) = \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-4n^4 + 3n^3 + 2n^2 - 5\right) = \ldots$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(8 - 3n + 5n^2 - 7n^3\right) = \ldots$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(8n^2 - 2n - 11\right) = \ldots$

EXERCICE 2 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} (5 - 2 \times 5^n + 4 \times 7^n) = \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} (3 - 4 \times 8^n + 3 \times 9^n) = \ldots$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-5 \times 5^n + 2 \times 4^n - 8) = \ldots$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} (7 \times 6^n - 4 \times 5^n - 9) = \ldots$

EXERCICE 3 : A l'aide d'une factorisation forcée double, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^3 - 7n^2 + 4}{2n^2 - 4n - 5} = \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-2n^3 + 3n^2 - 5n - 7}{2n^3 - 4n^2 + 11n - 8} = \ldots$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-5n^3 - 8n^2 + 4n - 1}{-2n^4 - 4n^2 - 5} = \ldots$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-6n^3 + 3n^2 + n + 1}{-2n^3 + 5n - 1} = \ldots$

EXERCICE 4 : A l'aide d'une factorisation forcée double, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2 \times 6^n - 4 \times 5^n + 2}{-2 \times 3^n - 5 \times 2^n - 2} = \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5 \times 7^n - 3 \times 4^n + 5}{-2 \times 9^n + 8 \times 5^n + 3} = \ldots$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{7 \times 3^n - 4 \times 2^n + 1}{-4 \times 3^n - 7 \times 2^n + 3} = \ldots$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6 \times 9^n - 5 \times 7^n - 1}{-2 \times 9^n - 4 \times 3^n - 1} = \ldots$

EXERCICE 5 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(5n^2 - 2n + 1 - 4\sqrt{n}\right) = \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-8n^2 + 11n + 5 + 9\sqrt{n}\right) = \ldots$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 + 5n - 1 - 3\sqrt{n}}{-2n + 1 - 5\sqrt{n}} = \ldots$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2 - 7n - 2 - 5\sqrt{n}}{3n^2 - 9n + 2 - 4\sqrt{n}} = \ldots$

2 Les limites par théorème

EXERCICE 6 : Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(4n^2 - 7n - 4 + 2\cos(n)\right) = \ldots$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-n^4 + 2n^3 + 5n^2 - 5 - 7\sin(n)\right) = \ldots$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} (2 \times 3^n - 5 \times 2^n - 7 - 3\cos(n)) = \ldots$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} (-4 \times 5^n + 5 \times 4^n + 2 + 2\sin(n)) = \ldots$

EXERCICE 7 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 5n^2 - 3n + 2 - \sqrt{n+2}$.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Montrer que pour tout entier n : $n + 2 \leqslant (n+3)^2$.
2. En déduire que pour tout entier n, $\sqrt{n+2} \leqslant n + 3$.
3. En déduire que pour tout entier n, $u_n \geqslant 5n^2 - 4n - 1$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 8 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{\sqrt{1+n^2}}{n+1}$.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Montrer que pour tout entier n : $n^2 \leqslant 1 + n^2 \leqslant (n+1)^2$.
2. Montrer que pour tout entier n : $n \leqslant \sqrt{1+n^2} \leqslant n + 1$.
3. En déduire que pour tout entier n, $\frac{n}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 9 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 2n + 3 - 5\sqrt{n^2+1}$.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Par une factorisation forcée, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $u_n = n\left(2 + \frac{3}{n} - 5\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 10 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Montrer que pour tout entier n, $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1}$.
2. En déduire le signe de la suite (u_n).
3. A l'aide d'une expression conjuguée, que pour tout entier n, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
4. En s'aidant de la question 1), montrer que pour tout entier n, $u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
5. A l'aide du théorème des encadrements (ou des Gendarmes), déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 11 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par :
$u_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{1}{n^3+2} + \ldots + \frac{1}{n^3+n}$.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 à $0,01$ près.
2. De tous les fractions présentes dans u_n, quelle est la plus petite ? la plus grande ?
3. D'après la question précédente, encadrer chaque fraction présente dans u_n, puis additionner tous ces encadrements. On montrera qu'alors, pour tout entier n non nul :
   $\frac{n}{n^3+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n^3+1}$.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. En vous inspirant des questions précédentes, déterminer les limites des suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par :
   a. $v_n = \frac{1}{n^3+1} + \frac{2}{n^3+1} + \ldots + \frac{n}{n^3+1}$.
   b. $w_n = \frac{\sin(1)}{n^2+1} + \frac{\sin(2)}{n^2+1} + \ldots + \frac{\sin(n)}{n^2+1}$.

EXERCICE 12 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par :
$u_n = 3 + 3 \times 0,4 + 3 \times 0,4^2 + \ldots + 3 \times 0,4^n$.
Le but de l'exercice est de déterminer la limite de cette suite.

1. Simplifier la somme à l'aide des formules des suites géométriques.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 13 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par :
$u_n = 2 + 5 \times 0,2^n$.
On définit ensuite la suite (S_n) définie pour tout entier n par :
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
Le but de l'exercice est de déterminer des limites avec la suite (S_n).

1. Simplifier la somme S_n à l'aide des formules des suites géométriques et des suites constantes.
2. En déduire la limite de la suite (S_n).
3. Déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{S_n}{n+1}\right)$